

# ビュフォンの針の幾何学的拡張

5年A組 左藤 開己  
指導教員 川口 慎二

## 1. 要約

私はビュフォンの針に関する研究を行っている。今回はビュフォンの針の理論を拡張させた無理数の近似的な測定方法や高次元化に関する研究を幾何学的な視点から行った。

キーワード ビュフォンの針、無理数、正射影

## 2. 研究の背景と目的

今回の研究では、ビュフォンの針に関する性質やその幾何学的な応用に焦点をあてて研究を行った。また実際にビュフォンの針の証明やその実演に関する研究は数多く行われているが、その応用理論はよく知られておらず、独自の証明とそれによる公式の発見を目標としている。

## 3. 研究内容

### 3-1 ビュフォンの針

ビュフォンの針の問題とは「間隔  $d$  で描かれた無数の平行線が広がる平面上に長さ  $r$  の針を無作為に投げたときにそれが平行線と交わる確率を求める」という問題である(下の図1参照)。ここで、「針を無作為に投げる」とはその座標と方向を一様乱数で発生させるということである。

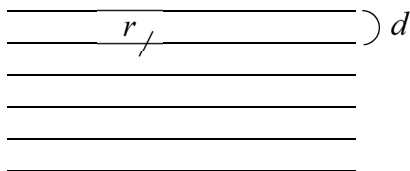


図1 ビュフォンの針

実際に、 $r < d$  のときに交わる確率は

$p = \frac{2r}{\pi d}$  となる。左辺の分母に円周率  $\pi$  が含まれていることから大量の針を投げて、その交差数と試行回数から  $p$  を求め、 $d, r$  を代入することで円周率  $\pi$  の近似値を求めることが可能である(モンテカルロ法)。

### 3-1-1 ビュフォンの針の証明

ビュフォンの針において座標と方向の2つが確率変数となっており、1つずつ固定して考える。

- (1) 平行線と垂直になるように針を落とす(方向を固定する)。

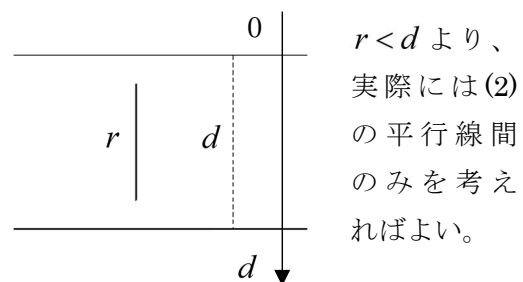


図2 (1)の状況

図2のように垂直成分に座標をおく。周期的に考えると針の下端の動く距離の範囲は

0 から  $d$  までであり、そのうち 0 から  $r$  のときだけ交わると考えると、交わる確率は  $\frac{r}{d}$  である。

(2)  $\theta$  回転させる (方向を考える)。

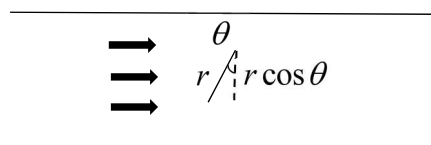


図3 針を正射影する

図3の垂直成分(正射影)は  $r \cos \theta$  であり交わる確率は  $\frac{r \cos \theta}{d}$  となる。

(3) グラフで考える。

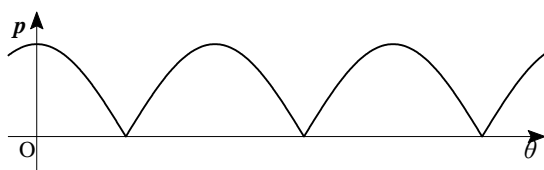


図4  $p = p(\theta)$  のグラフ

縦軸を  $p$ , 横軸を  $\theta$  とおく。このとき大数の法則から、 $p$  は真の平均値  $\bar{p}$  に収束する。

図5のように  $p = \frac{r \cos \theta}{d}$  のグラフと  $\theta$

軸、 $p$  軸  $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  で囲まれた面積を底辺で割るとその平均値  $\bar{p}$  を求めることができる(長方形の高さとみなす)。

よって、 $r < d$  のとき、

$$\bar{p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \theta}{d} d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2r}{\pi d}$$

となる。(証明終)

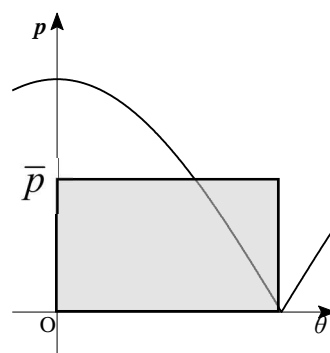


図5 平均値  $\bar{p}$  を求める

### 3-1-2 ビュフォンの針のシミュレーション

エクセルを用いて簡単なシミュレーションを行った。ここで座標(垂直方向のみ)と方向をランダム関数で表した。

表1 シミュレーション結果

落とした針の本数	交わった針の本数	$\pi$ の測定値
10	7.4	2.703
20	11.1	3.063
50	33.1	3.021
100	61.7	3.241
1000	633.1	3.159
10000	6337.1	3.156
1000000	636510.2	3.142

$d = r = 1$  とし、それぞれ 10 回ずつの試行の平均をとっている。試行回数を増やせば増やすほど理論値 ( $\pi = 3.141592\dots$ ) に近い値を導き出すことができた。

### 3-2 正多角形への拡張

針の代わりに正多角形を落としたときに、平行線と交わる確率についての研究を

行った。

### 3-2-1 シミュレーション

一边を  $r=1$ ,  $d=5$  とする。針と同様にシミュレーションを行い、1000回の試行で平行線と交わった図形の数求めた。今回は正三角形、正四角形、正五角形、正六角形の場合を調べた。

表2 多角形のシミュレーション結果

正三角形	正四角形	正五角形	正六角形
193	258	291	381

このときに平行線と交わる図形の数之比は  $3:4:5:6$  に近い比であり、正  $n$  角形が平行線と交わる確率は、 $n$  と比例関係があると予想できる。

### 3-2-2 正 $n$ 角形 ( $n=3, 4, 5, 6$ ) の確率

ビュフォンの針と同様に、正射影および向を変化させたときの長さの平均値を利用して求める。またそれぞれの座標は以後、複素数平面を用いて表すことにする。

虚部が正の複素数を  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  としたとき、それらと原点を結んでできる図形の虚軸方向への正射影の長さを  $h$  とおくと  $h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_n)\}$  と表すことができる。

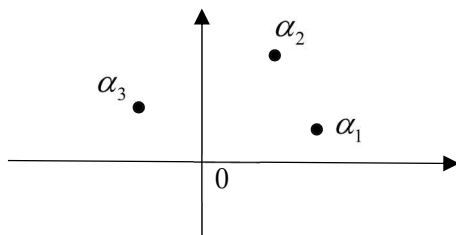


図6 複素数平面における正射影

例えば図6の場合を考える。虚軸方向への正射影において関係するのは  $\alpha_2$  と  $0$  であり、その長さは  $\text{Im}(\alpha_2)$  である。

#### (1) 正三角形の場合

求める確率を  $p_3$  とする。

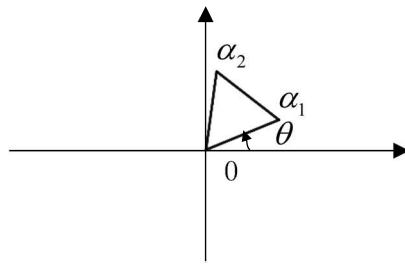


図7 正三角形の場合

図7のように原点中心で正三角形を  $\theta$  だけ回転させて考える。このとき対称性よ

り、 $0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$  で考えればよい。

・  $\text{Im}(\alpha_2) \geq \text{Im}(\alpha_1)$  のとき

$$\begin{aligned} \text{Im}\left(r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + ir \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \geq \text{Im}(r \cos \theta + ir \sin \theta) \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  なので

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sin \theta \text{ より、}$$

$$h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2)\}$$

$$= r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} h \, d\theta \div \frac{\pi}{3} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \, d\theta \div \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{3r}{\pi}$$

したがって、 $p_3 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{3r}{\pi d}$ .

・  $\text{Im}(\alpha_1) \geq \text{Im}(\alpha_2)$  のとき

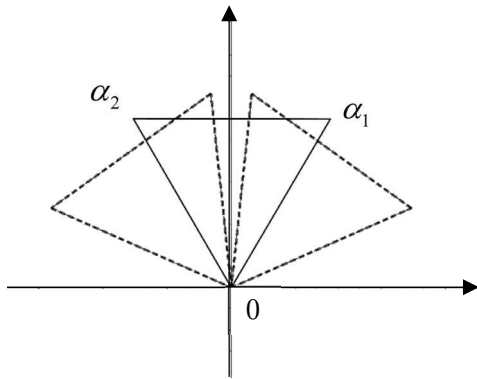


図8  $\text{Im}(\alpha_1) \geq \text{Im}(\alpha_2)$  の場合

対称性（線対称）を利用すれば、同様の結果になる。

(2) 正四角形（正方形）の場合

求める確率を  $p_4$  とする。

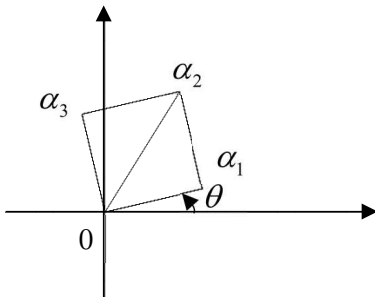


図9 正方形の場合

このとき対称性より、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  で考えればよい。

三角形の場合と同様に考えると、  
 $h = \text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \text{Im}(\alpha_3)\}$

$$= \sqrt{2}r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} h d\theta \div \frac{\pi}{4} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta \div \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{4r}{\pi} \end{aligned}$$

より、 $p_4 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{4r}{\pi d}$  となる。

(3) 正五角形の場合

求める確率を  $p_5$  とする。

正三角形の場合と同様に  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{5}$  で考

えると、

$$h = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \sin\left(\theta + \frac{2}{5}\pi\right)$$

なので、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{5}} h d\theta \div \frac{\pi}{5} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) d\theta \div \frac{\pi}{5} \\ &= \frac{5r}{\pi} \end{aligned}$$

ゆえに、 $p_5 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{5r}{\pi d}$  となる。

(6) 正六角形の場合

求める確率を  $p_6$  とする。

正方形の場合と同様に、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  で

考えると、

$$h = 2r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

なので、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} h d\theta \div \frac{\pi}{6} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) d\theta \div \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{6r}{\pi} \end{aligned}$$

ゆえに、 $p_6 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{6r}{\pi d}$  となる。

以上から考えると、正角形を落としたときに、平行線と交わる確率  $p_n$  は、

$$p_n = \frac{nr}{\pi d}$$

と予想できる。

### 3-2-3 正 $n$ 角形での確率

実際に、正角形を落としたときに平行線と交わる確率  $p_n$  が、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$  であることを証明する。

#### 定理 1

間隔  $d$  の無数の平行線が描かれた平面上に、一辺の長さが  $r$  ( $r \ll d$ ) である正  $n$  角形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を  $p_n$  とすると、

$$p_n = \frac{nr}{\pi d}$$

が成り立つ。

(証明)  $n$  の偶奇に分けて証明する。

(1)  $n = 2m - 1$  ( $n$  が奇数) のとき

$\alpha_1$  と  $\alpha_{m-1}$  を結ぶ線分の長さを  $l$  とする。

図 10 において、余弦定理より、

$$l = r \sqrt{\frac{1}{2\left(1 - \cos \frac{\pi}{2m-1}\right)}}$$

となる。

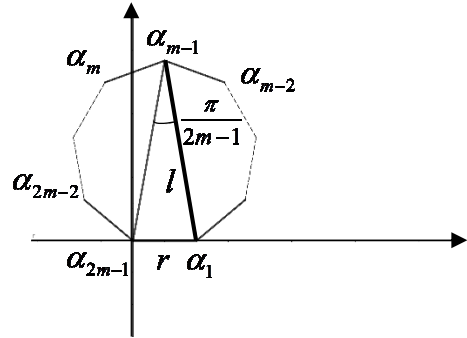


図 10 正  $2m - 1$  角形の場合

ここで、

$$\begin{aligned} &\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m-1})\} \\ &= \text{Im}(\alpha_{m-1}) \text{ とする。} \end{aligned}$$

このとき、これまでと同様に、

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2m-1} \text{ で考えると、}$$

$$\sin\left(\theta + \pi\left(1 - \frac{2}{2m-1}\right)\right) \geq \sin \theta \text{ より、}$$

$$h = l \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right) \text{ である。}$$

したがって、三角関数に関する和積公式や半角の公式を利用すると、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{2m-1}} h d\theta \div \frac{\pi}{2m-1} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2m-1}} l \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2m-1}\right)\right) d\theta \end{aligned}$$

$$\div \frac{\pi}{2m-1}$$

$$\begin{aligned}
&= l \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2m-1} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{2m-1} \right) \right) \right\} \div \frac{\pi}{2m-1} \\
&= 2l \sin \frac{\pi}{2(2m-1)} \div \frac{\pi}{2m-1} \\
&= \frac{(2m-1)r}{\pi}
\end{aligned}$$

である。したがって、

$$p_{2m-1} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{(2m-1)r}{\pi d}$$

となる。

対称性を利用することにより、

$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m-1})\}$   
 $= \text{Im}(\alpha_{m-1})$  となる場合以外についても、  
同様の結果を得ることができる。

(2)  $n = 2m$  ( $n$ が偶数)のとき

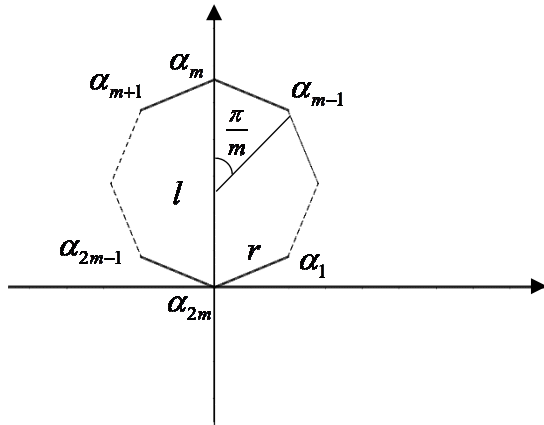


図 11 正  $2m$  角形の場合

$\alpha_m$  と  $\alpha_{2m}$  を結ぶ線分の長さを  $l$  とする。

図 11 において余弦定理を用いると、

$$l = r \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \frac{\pi}{m}}}$$

となる。

ここで、

$\text{Max}\{\text{Im}(\alpha_1), \text{Im}(\alpha_2), \dots, \text{Im}(\alpha_{2m})\}$   
 $= \text{Im}(\alpha_m)$  とする。

このとき、これまでと同様に、

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$  で考えると、

$h = l \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right)$  である。

したがって、

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= \int_0^{\frac{\pi}{m}} h \, d\theta \div \frac{\pi}{m} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{m}} l \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right) d\theta \div \frac{\pi}{m} \\
&= l \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \right) - \cos \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\div \frac{\pi}{m}$$

$$= 2l \sin \frac{\pi}{2m} \div \frac{\pi}{m} = \frac{2mr}{\pi}$$

である。したがって、

$$p_{2m} = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{2mr}{\pi d}$$

となる。

ゆえに(1)と(2)より、3以上のすべての

自然数  $n$  に対して、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$  が成り立

つ。(証明終)

### 3-3 凸図形への拡張

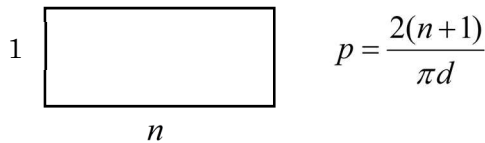
正  $n$  角形を含む凸図形を落としたとき

に、平行線と交わる確率について研究を行った。

### 3-3-1 凸図形の場合

さまざまな凸多角形について、平行線と交わる確率を求めた。結果を紹介する。

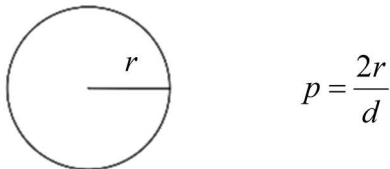
(1) 底辺  $n$ 、高さ 1 の長方形



(2) 内接する正三角形の一边を  $r$  とするルーローの三角形



(3) 半径  $r$  の円



(4) 半径  $r$  の半円

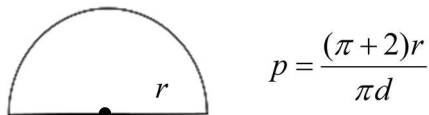


図 12 種々の凸図形の場合

図 12 の(1)から(4)の結果と正  $n$  角形の場合の確率を合わせて考えると、凸図形の周の長さを  $L$  としたとき、その凸図形を落

として平行線と交わる確率は、 $p = \frac{L}{\pi d}$  となるのではないかと予想できる。

### 3-3-2 凸多角形の場合

まず、凸多角形において、 $p = \frac{L}{\pi d}$  が成

り立つことを証明する。以後、凸多角形の周の長さを  $L$ 、凸  $n$  角形と平行線が交わる確率を  $p_n$  とおく。

(1) 数学的帰納法を用いた証明

(i)  $n=3$  のとき

正三角形と同様に複素数平面上で考える。しかし、それぞれの辺、角度に対称性がないことに注意する必要がある。

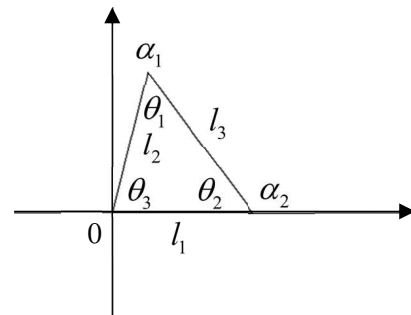


図 13 複素数平面上の凸三角形

①  $\text{Im}(\alpha_2) \geq \text{Im}(\alpha_1) > 0$  のとき

$$\sin(\theta + \theta_3) \geq \sin \theta > 0 \text{ なので、} \quad 0 < \theta \leq \theta_2$$

②  $\text{Im}(\alpha_1) > \text{Im}(\alpha_2) \geq 0$  のとき

$$\sin \theta > \sin(\theta + \theta_3) \geq 0 \text{ なので、} \quad \theta_2 < \theta \leq \pi - \theta_3$$

③  $\text{Im}(\alpha_1) \geq 0 > \text{Im}(\alpha_2)$  のとき

$$\sin \theta \geq 0 > \sin(\theta + \theta_3) \text{ なので、} \quad \pi - \theta_3 < \theta \leq \pi$$

これ以降は、原点中心の点対称を利用できるので、 $0 < \theta \leq \pi$  のみ考えればよい。

①～③より、

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{\pi} \left\{ l_2 \int_0^{\theta_2} \sin(\theta + \theta_2) d\theta \right. \\ &\quad \left. + l_1 \int_{\theta_2}^{\pi - \theta_3} \sin \theta d\theta \right. \\ &\quad \left. + l_3 \int_{\pi - \theta_3}^{\pi} \sin(\theta - \theta_2) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ l_2 (\cos \theta_3 + \cos \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + l_3 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \right. \\ &\quad \left. + l_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_3) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ (l_2 + l_3) \cos \theta_1 + (l_3 + l_1) \cos \theta_2 \right. \\ &\quad \left. + (l_1 + l_2) \cos \theta_3 \right\} \end{aligned}$$

ここで、余弦定理から、

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_1^2}{2l_2l_3} \\ \cos \theta_2 &= \frac{l_3^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_3l_1} \\ \cos \theta_3 &= \frac{l_1^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_1l_2} \end{aligned}$$

を代入して計算すると、

$$\bar{h} = \frac{1}{\pi} (l_1 + l_2 + l_3) = \frac{L}{\pi}$$

となるので、 $p_3 = \frac{\bar{h}}{d} = \frac{L}{\pi d}$  が成り立つ。

(ii)  $n = k$  のとき

$$p_k = \frac{L}{\pi d} \text{ が成り立つと仮定する。}$$

$n = k+1$  のとき、図 14 の  $k+1$  角形において、 $A_k$  を点  $A_k(\alpha_k)$  として、

$$l_1 = A_{k+1}A_1 + A_1A_2, \quad l_2 = A_{k+1}A_2$$

とおく。

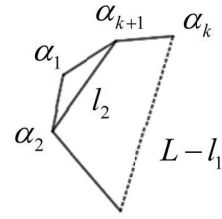


図 14 頂点を 1 つ削る

平行線と  $\triangle A_{k+1}A_1A_2$  が交わる確率を  $p_{(3)}$ 、 $k$  角形  $A_2A_3 \cdots A_{k+1}$  が交わる確率を  $p_{(k)}$ 、線分  $A_{k+1}A_2$  が交わる確率を  $p_{(l)}$  とおくと、以下の等式が成り立つ。

$$p_{k+1} = p_{(3 \vee k)} = p_{(3)} + p_{(k)} - p_{(l)} \quad \cdots (*)$$

すると、(i)より、 $p_{(3)} = \frac{l_1 + l_2}{\pi d}$ 。仮定

より、 $p_{(k)} = \frac{L - l_1 + l_2}{\pi d}$ 。また、ビュフォ

ンの針における事実より、 $p_{(l)} = \frac{2l_2}{\pi d}$ 。

これらを(\*)式に代入して、

$$p_{k+1} = \frac{l_1 + l_2}{\pi d} + \frac{L - l_1 + l_2}{\pi d} - \frac{2l_2}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}.$$

以上より、3以上のすべての自然数  $n$  に

対して、 $p_n = \frac{L}{\pi d}$  が成立する。

(証明終)

(2) 組み合わせの重複を利用した証明

図 15 のような凸  $n$  角形を考える。平行線は 2 つの辺とのみ交わると考え、それぞれの辺と交わる確率を  $p_1, p_2, \dots, p_n$  とおく。

このとき、いずれかの辺と交わる確率は



$\sum_{k=1}^n p_k \dots \textcircled{1}$  である。

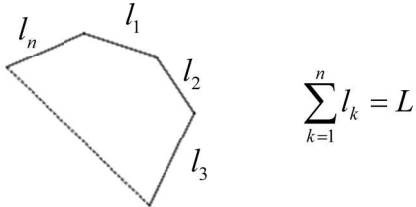


図 15 辺長が  $l_1, l_2, \dots, l_n$  である凸多角形

実際には、交わる 2 つの辺を選ぶ (組合せ) と考えることができる。そのため重複を考える必要がある。例えば、三角形の場合には図 16 のような重複が考えられる。

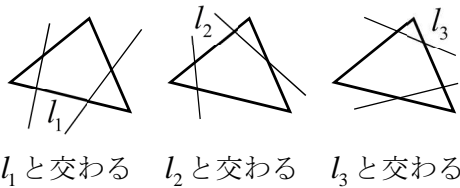


図 16 三角形の場合の重複

6本の直線 (平行線) のうち3本重複している。それぞれの辺が平行線と交わる確率は、ビュフォンの針における事実より、

$$p_n = \frac{2l_n}{\pi d} \dots \textcircled{2}$$

①, ②を合わせて考えると、

$$p = \sum_{k=1}^n p_k \times \underbrace{\frac{{}_n C_2}{{}_n P_2}}_{\text{重複分}} = \frac{2}{\pi d} \sum_{k=1}^n l_k \times \frac{1}{2} = \frac{L}{\pi d}. \quad (\text{証明終})$$

### 3-3-3 凸図形での確率と証明

次に曲線部分を凸図形が含んでいても、

$p = \frac{L}{\pi d}$  が成り立つことを証明する。

(1) 図 17 のように凸図形に三角形を内接させる。また、すき間を埋めるように三角形を詰める操作を繰り返し行う。

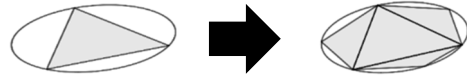


図 17 すき間を埋める操作

凸図形の周の長さを  $L$  として、操作を  $x$  回繰り返したときの多角形の周の長さを  $f(x)$  とする。このとき、三角不等式より、 $f(x) < f(x+1)$ 。また、凸性より  $f(x) < L$  である。上に有界な単調増加列は上限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  と

なる。そこで、操作を  $x$  回繰り返したときに平行線と交わる確率を  $p_1(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \dots \textcircled{1}$$

(2) 図 18 のように凸図形に三角形を外接させる。また、すき間にできる三角形を削る操作を繰り返し行う。

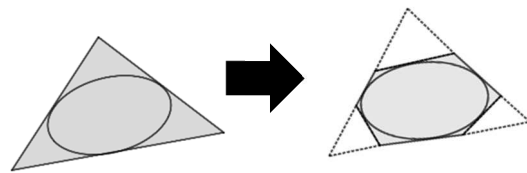


図 18 すき間を削る操作

この操作を  $x$  回繰り返したときの多角形の周の長さを  $g(x)$  とする。このとき、三角不等式より、 $g(x) > g(x+1)$ 。また、凸性より  $g(x) > L$  である。下に有界な単調減少列は下限に収束するので、

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$  となる。そこで、操作を  $x$

回繰り返したときに平行線と交わる確率を  $p_0(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\pi d} = \frac{L}{\pi d} \quad \dots \textcircled{2}$$

(3) (1)において凸図形と凸多角形との間にある残ったすき間とのみ交わる確率を  $p^{(1)}(x)$ , (2)において残ったすき間とのみ交わる確率を  $p^{(2)}(x)$  とする。このとき、

$$p_1(x) + p^{(1)}(x) = p = p_0(x) - p^{(0)}(x)$$

が成り立ち、 $p^{(1)}(x) > 0$ ,  $p^{(0)}(x) > 0$  より、 $p_1(x) < p < p_0(x)$  …③が成り立つ。

以上から、①～③より、はさみうちの原理により、 $p = \frac{L}{\pi d}$ . (証明終)

ここまでの議論により、次の定理が成り立つことを証明できた。

### 定理 2

間隔  $d$  の無数の平行線が描かれた平面上に、周の長さが  $L$  である凸図形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を  $p$  とすると、

$$p = \frac{L}{\pi d}$$

が成り立つ。

ここで、ビュフォンの針について再考する。底辺が  $\Delta h$ , 高さが  $r$  である長方形を落としたときに、平行線と交わる確率は定理 2 より、 $\frac{2(r+\Delta h)}{\pi d}$  である。ここで、針は底辺の長さが限りなく小さい長方形でないと考えると、

$$p = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{2(r+\Delta h)}{\pi d} = \frac{2r}{\pi d}$$

となる。循環論法が生じるため、これはビュフォンの針の事実を証明することにはならないが、分子の係数が 2 である理由などを説明することができる。

## 3-4 高次元空間への拡張

ビュフォンの針や定理 1、定理 2 の高次元化に関する研究を行った。

### 3-4-1 高次元化への拡張理論

定理 2 の次元を単純に 1 つ上げた場合、表面積に比例する等式を導き出すことが可能ではないかと考えた。本節ではその等式を発見することを目標とする。

発生させる図形の次元や発生させる図形の動ける範囲の次元、交差する図形の次元という 3 つの次元に着目した。

#### ①発生させる図形の次元

例えば、針の次元は 1 次元、凸図形の次元は 2 次元である。

#### ②発生させる図形の動ける範囲の次元

例えば、3-1-1 節の(1)は 1 次元、(2)は 2 次元の例である。

#### ③交差する図形の次元

これまでの研究では、平行線を考えてきた。まず 1 つ次元を上げるとどのような図形になるのかについて、以下の 2 つの仮説を立てた。

#### 【仮説 1】 平行面

直線の次元を上げると平面になるから、平行線は平行面に置き換えることにより、拡張できるという仮説である。

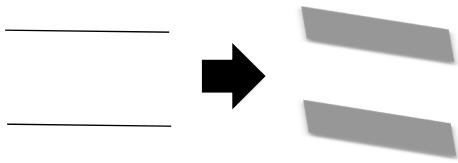


図 19 平行線を平行面に

しかし、仮説 1 が誤りであることを示す反例を見つけることができた。

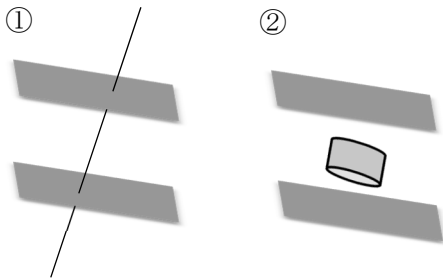


図 20 仮説 1 の反例

図 20 の 2 つの図形を比較したとき、表面積が小さいのは①であるのに対し、明らかに交わる確率が大きいのも①である。よって、平行面に交わる確率は表面積に比例しないと考えられる。

また、単純に定理 2 の分子の次元を 1 つ上げたとしても、仮説 1 のモデルでは分母にある間隔  $d$  の次元（平行面の幅）が上がっていないことが成り立たない原因であると考えられる。

【仮説 2】 格子平面

これまでの研究の原点である 3-1-1 節(1)のモデルに戻って考え直した。

① 3-1-1 節(1)の単純化

3-1-1 節(1)について、本来針の動ける範囲の次元は 1 次元であり、それが交差する相手の図形の次元は 0 次元（点）であ

る。つまり平行線（1 次元）は不要である。具体的に考えると、図 21 のモデルになる。

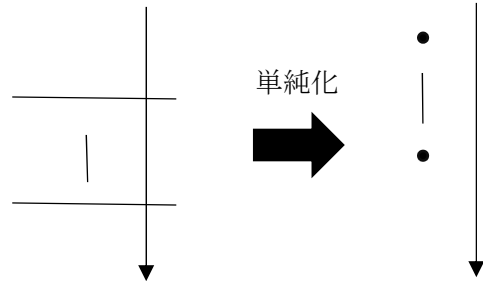


図 21 3-1-1 節(1)の単純化モデル

② 2 次元図形の捉え方

2 次元図形は図 21 のように点と点の間の空間（線分）内に収めることができない。ここで必要な操作が**正射影**である。

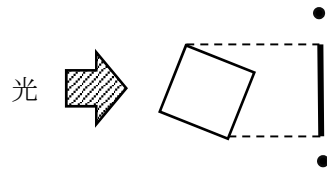


図 22 2 次元図形の正射影

つまり、「凸図形を落として平行線が交わる」とは、「凸図形の正射影が等間隔に並ぶ点と交わる」と置き換えることができる。またこれ以降、この操作を「**単純化**」と呼び、その逆の操作を「**複雑化**」と呼ぶことにする。

③ 単純化したモデルの高次元化

仮説 1 の失敗を踏まえ、間隔に相当するものの次元を上げることに注意して、新しいモデルを考えた。

図 23 のように拡張させた平面を「**格子平面**」と呼ぶことにし、また  $n$  次元におい

て同様の操作を行ってできる空間を  **$n$ 次元格子空間**（例えば、格子平面は2次元格子空間）、格子点の間隔を**単位  $n$ 次元格子空間**（例えば、正方形は単位2次元格子空間）と呼ぶことにする。

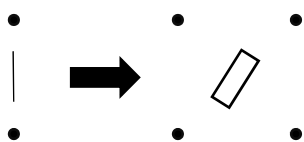


図 23 格子平面

④格子平面と交わる確率

格子平面上において単位正方形（格子点に囲まれた正方形）の面積を  $s$ ，発生させる図形の面積を  $c$  ( $c \ll s$ ) とし、その図形が格子点と交わる確率について考える。

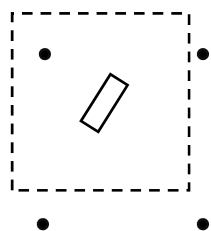


図 24 図形の近傍としての単位正方形

「固定された格子平面上に図形を発生させる」とは、相対的に考えて「固定された図形上に格子平面を発生させる」としてもよい。図 24 は図形の近傍にある格子点を示している。ここで、格子平面の周期性を利用すると、点1つ当たりが動ける座標の範囲は図 24 中の点線で囲まれた単位正方形の内部になる。よって、「格子点と図形が交わる確率」は「単位正方形の内部の1つの点に着目して、それが図形の内部に存在する確率」と置き換えることができる。よって  $c \ll s$  のとき、格子点と図形が交

わる確率を  $p$  とおくと、 $p = \frac{c}{s}$  が成り立つ。

ここで、3-1-1節(1)における  $p = \frac{r}{d}$

と比較すると、1つ次元が上がったと考えることができる。よって、この等式を定理2と同様に拡張させることにより、表面積に比例する等式を発見できると予想した。

⑤3次元図形の捉え方

②と同様に3次元図形は格子平面上に収めることができない。ここでも正射影が必要である（図 25 参照）。

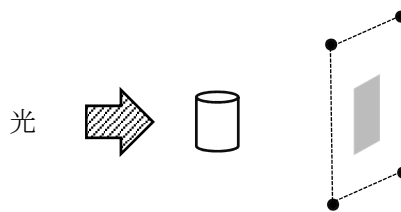


図 25 3次元図形の正射影

⑥⑤の複雑化

最後に⑤を複雑化すると図 26 のようになる。

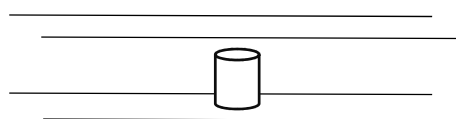


図 26 ⑤の複雑化

3-4-2 定理2の2次元化

仮説2のモデルをもとに実際に定理2の2次元化（ここで2次元とは格子空間の次元のことを意味する）を行い、単純化したモデル（3-4-1節の(3)⑤）において格子点と影が交わる確率を求める。

(1) 定義

3-4-1 節の(1)~(3)に基づいて、以下のように定義する。

定義 1

$m$  次元凸図形の座標と方向を一様乱数のもとで発生させ、動ける範囲の次元を  $k$  次元とする。このとき、その  $m$  次元凸図形が  $n$  次元格子空間上の格子点と交わり、また  $k > n$  のときは、その正射影が格子点と交わる確率を  $p(n, m, k)$  とおく。

ただし、 $m$  次元凸図形の体積、表面積は単位  $n$  次元格子空間の体積に比べて十分小さいものとする。

例えば、

$$p(1, 1, 1) = \frac{r}{d} \quad (\text{ただし、} r \ll d)$$

$$p(1, 1, 2) = \frac{2r}{\pi d} \quad (\text{ただし、} r \ll d)$$

$$p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d} \quad (\text{ただし、} L \ll d)$$

$$p(2, 2, 2) = \frac{c}{s} \quad (\text{ただし、} c \ll s)$$

(2) まず、 $p(2, 2, 3)$  を求める (ビュフォンの針の 2 次元化)。ここで、以下の事実を前提として扱う。

事実

平面  $P$  に含まれ面積が  $S$  である図形を平面  $Q$  に正射影したときの面積は  $S \cos \theta$  である。ただし、 $\theta$  を平面  $P$  と平面  $Q$  のなす角とする。

ここで、3-4-1 節の(3)④に基づいて

単位正方形の面積を  $s$ 、発生させる図形の面積を  $c$  とおく。

仮説 1  $p(2, 2, 3) = \frac{2c}{\pi s}$  である。

ビュフォンの針と同様に考えると、

$$\bar{c} = \int_0^{\pi/2} c \cos \theta d\theta \div \frac{\pi}{2} = \frac{2c}{\pi}$$

$$p = \frac{\bar{c}}{s} = \frac{2c}{\pi s} \quad \text{となる。}$$

しかし、これはなす角が一様乱数のもとで図形を発生させたときに、格子点と交わる確率であり、方向を一様乱数のもとで考えたときの確率ではない。

一般に、なす角を決定しても方向ベクトルが決定される訳ではない (図 27 参照)。

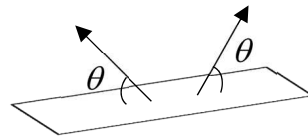


図 27 なす角と方向ベクトル

よって、なす角が一様乱数で表せるとは限らず、仮説 1 の信憑性は下がる。

①方向についてベクトルを用いて厳密に考える。

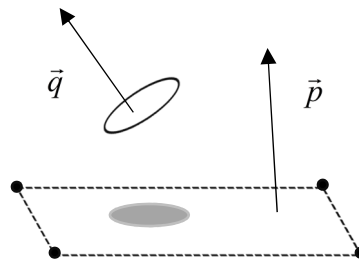


図 28 2つの法線ベクトル

図 28 のように、単位正方形の法線ベクトル  $\vec{p} = (0, 0, 1)$  と発生させる図形の法線ベクトル  $\vec{q} = (x, y, z)$  をおき、2つの法線ベクトルのなす角を  $\theta$  とおく。このとき、 $\vec{q}$  は、 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 、つまり単位ベクトルとし、対称性から、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  で考える。このとき、それぞれのベクトルの内積を利用すると、

$$p = \frac{c \cos \theta}{s} = \frac{c}{s} \cdot \frac{(0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z)}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{cz}{s}.$$

よって、 $\vec{q}$  の方向を一樣乱数で発生させたときの  $z$  成分の期待値を求める必要がある。 $z$  成分の期待値を  $E[z]$  と表す。

②球面状の点の一樣分布として考える。

$\vec{q}$  の条件である  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  と、 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  を幾何的に考えると、 $\frac{1}{8}$  球面と解釈することができる。 $\vec{q}$  の先端を 1 つの点として考えると、 $\vec{q}$  の方向を一樣乱数で発生させるとは、 $\frac{1}{8}$  球面上に点を一樣分布させると考えることができる。

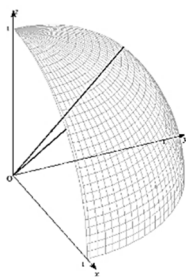


図 29  $\frac{1}{8}$  球面上の一樣分布

このとき、球面を媒介変数を用いると、

$$x = \cos \theta \sin \varphi,$$

$$y = \cos \theta \cos \varphi,$$

$$z = \sin \theta$$

と表すことができる。図 29 はこの媒介変数を用いて表した球であり、 $\theta, \varphi$  は等間隔で表されている。しかし、これは明らかに緯線と経線の交点が球面で一樣に分布されているとはいえず、北極にその交点が集中していることがわかる。よって、 $\theta, \varphi$  を一樣乱数にしても球面上に点を一樣に分布できないと考えた。

実際にこれらを一樣乱数にすると、 $\theta, \varphi$  は独立で無相関であり、

$$E[x] = E[\cos \theta] E[\sin \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$E[y] = E[\cos \theta] E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2},$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{2}{\pi}.$$

ここで、 $\frac{2}{\pi}$  は 3 - 1 - 1 節の(3)と同様に計算して求めた。よって対称性が崩れており、一樣分布とはいえないことがわかる。

③正確な一樣分布を考える。

例えば、図 30 のおうぎ形内部の点の一樣分布を考える。

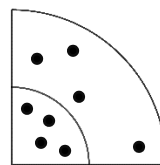


図 30 おうぎ形内部での一樣分布

おうぎ形内部の点は独立 2 変数  $r, \theta$  で表すことができる (極座標)。 $r, \theta$  を一樣乱数で表すと、中心部分に点が集中する。これは密度の偏りが原因である。

例えば図 30 において、点をそのように、

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 1$  のもとで発生させる

と、 $r < \frac{1}{2}$  と  $\frac{1}{2} \leq r$  で点の数の割合は等しい

値に近づく。しかし、 $r < \frac{1}{2}$  と  $\frac{1}{2} \leq r$  では、

面積の割合が 1:3 になっているため密度の比は 3:1 となり偏りが生じる (図 30 は 8 個の点であるが密度の偏りを生んでいることがわかる)。

よって、密度を等しくするには面積の割合を等しくする必要があり、面積の変化量自身を一様乱数にする必要がある。具体的には面積の変化量を図 31 のように  $\Delta s$  とおくと、 $\Delta s = \frac{1}{2} \Delta \theta (\Delta r)^2$  となる。

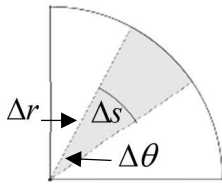


図 31 面積の変化量  $\Delta s$

よって、この式から  $\Delta s$  を一様乱数にするには  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$  を一様乱数にすればよい。

次に球面上でも同様に表面積の変化量を計算すると、

$$\Delta s = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} \int_0^{\Delta \theta} 2\pi \cos x \, dx = \Delta \varphi \sin \Delta \theta$$

となり、 $\Delta \theta$ ,  $\Delta \varphi$  を一様乱数にすればよい。確認としてそれぞれの期待値を求めると、 $\theta$ ,  $\varphi$  は独立で無相関であり、

$$E[\sin \varphi] = E[\cos \varphi] = \frac{2}{\pi},$$

$$E[\sin \theta] = \frac{1}{2}, \quad E[\cos \theta] = \frac{\pi}{4}$$

となるので、

$$E[x] = E[\cos \theta] E[\sin \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$E[y] = E[\cos \theta] E[\cos \varphi] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2},$$

$$E[z] = E[\sin \theta] = \frac{1}{2}$$

となり、それぞれの対称性を維持できていることがわかる。

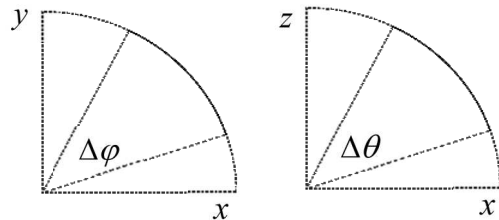


図 32 球面上の表面積の変化量

ゆえに、3-4-2 節の(2)①より、

$$p(2, 2, 3) = \frac{cE[z]}{s} = \frac{c}{2s}.$$

(3) 次に、 $p(2, 3, 3)$  を求める (定理 2 の 2 次元化)。

① 3-3-2 節の(2)と同様に考える。

発生させる凸  $n$  多面体のそれぞれの面積を、 $c_1, c_2, \dots, c_n$  とおき、 $F = \sum_{k=1}^n c_k$  とおくと、 $F$  は表面積を表す。

ここで、1 つの格子点に向けて発せられた光線 (正射影の成分) はやはり 2 つの面とのみ交わる。

ここで、1 つの格子点に向けて発せられた光線 (正射影の成分) はやはり 2 つの面とのみ交わる。

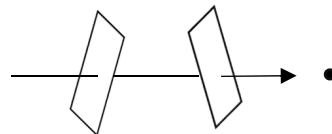


図 33 1 つの格子点に向けた正射影

これと重複を合わせて考えると、

$$p = \sum_{k=1}^n c_k \times \frac{{}_n C_2}{{}_n P_2} = \frac{1}{2s} \sum_{k=1}^n c_k \times \frac{1}{2} = \frac{F}{4s}.$$

② 3-3-3 節と同様に考える。

四面体 OABC を考える。△OAB, △OBC, △OAC, △ABC の面積を  $s_1, s_2, s_3, s_4$  として、それぞれ、△OAB, △OBC, △OAC と △ABC のなす角を  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  とおく。ここで、

$0 < \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$  ( $i=1, 2, 3$ ) とする。このとき、

$$s_4 = s_1 \cos \theta_1 + s_2 \cos \theta_2 + s_3 \cos \theta_3 < s_1 + s_2 + s_3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ (三角不等式の 3 次元化)。

[1] 表面積が  $F$  である凸 (立体) 図形の内部に四面体を内接させる。すき間を埋めるように四面体を詰める操作を繰り返し行い、 $x$  回繰り返したときの凸多面体の表面積を  $F(x)$  とおく。

①より  $F(x) < F(x+1)$ 。また、凸性から、 $F(x) < F$ 。上に有界な単調増加列は上限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F$ 。よ

って、 $x$  回繰り返したときに 3 次元空間内の格子点と交わる確率を  $P_1(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{4s} = \frac{F}{4s} \quad \cdots \textcircled{2}$$

[2] 表面積が  $F$  である凸 (立体) 図形の外部に四面体を外接させる。すき間にできる四面体を削る操作を繰り返し行い、 $x$  回繰り返したときの凸多面体の表面積を  $G(x)$  とおく。

①より  $G(x) > G(x+1)$ 。また、凸性か

ら、 $G(x) > F$ 。下に有界な単調減少列は

下限に収束するので、 $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = F$ 。よ

って、 $x$  回繰り返したときに 3 次元空間内の格子点と交わる確率を  $P_0(x)$  とおくと、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{G(x)}{4s} = \frac{F}{4s} \quad \cdots \textcircled{3}$$

[3] (複雑化したモデルで) [1]において凸図形と凸多面体との間にある残ったすき間とのみ交わる確率を  $P^{(1)}(x)$ , [2]において残ったすき間とのみ交わる確率を  $P^{(2)}(x)$  とする。

このとき、

$$P_1(x) + P^{(1)}(x) = p(2, 3, 3) = P_0(x) - P^{(0)}(x)$$

が成り立ち、 $P^{(1)}(x) > 0, P^{(0)}(x) > 0$  より、 $P_1(x) < p(2, 3, 3) < P_0(x)$   $\cdots \textcircled{4}$  が成り立つ。

以上から、②~④より、はさみうちの原理により、 $p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}$ 。(証明終)

以上から、3-4-2 節の(1)の定義に基づいて、単位格子平面の面積を  $s$ 、発生させる図形の表面積を  $F$  とおくと、次の定理が成り立つ。

### 定理 3

$$F \ll s \text{ であるとき、 } p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}.$$

### 3-5 $n$ 次元空間への拡張

$$\text{定理 2、定理 3 より、 } p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d},$$



$p(2, 3, 3) = \frac{F}{4s}$  となることがわかった。

すると、それぞれの右辺の係数に注目して、なぜ次元が上がると無理数である  $\pi$  が消えるのかについて疑問に思った。そこで本節では、これらを一般化してその疑問を解消することを目標とする。

### 3-5-1 諸定義

以下の記号を定義する。

- $V^{(n)}$  : 発生させる  $n$  次元図形の体積
- $S^{(n)}$  : 発生させる  $n+1$  次元図形の表面積
- $d^{(n)}$  : 単位  $n$  次元格子空間の体積
- $V_n$  :  $n$  次元球の体積
- $S_n$  :  $n+1$  次元球の表面積
- $\mathbb{R}^n$  :  $n$  次元ユークリッド空間

### 3-5-2 係数に着目した定理2および定理3の一般化

いくつかの手順を経て一般化する。

(1)  $p(n, n, n)$  を求める。

$\mathbb{R}^n$  を無限個の点の集合として考えると、3-4-1 節の(3)④を応用させることができ、 $p(n, n, n) = \frac{V^{(n)}}{d^{(n)}}$  となる。

(2)  $p(n, n+1, n)$  を立式する。

① 3-4-2 節の(2)で用いた事実を一般化する。

#### 定義2

$\mathbb{R}^{n+1}$  における  $n$  次元図形の体積を  $u_n$ 、それをなす角  $\theta$  で  $\mathbb{R}^n$  に正射影させたとき

の  $n$  次元図形の体積を  $u_n^\downarrow$  とおく。

#### 命題

すべての自然数  $n$  に対して、

$$u_n^\downarrow = u_n \cos \theta$$

が成り立つ。

(証明)

[ i ]  $n=1$  のとき

明らかに、 $u_1^\downarrow = u_1 \cos \theta$  が成り立つ。

[ ii ]  $n=k$  のとき

$u_k^\downarrow = u_k \cos \theta$  と仮定する。

$n=k+1$  のときを考える。

$k+1$  次元図形を含む  $\mathbb{R}^{k+1}$  に正射影させる。 $\mathbb{R}^{k+1}$  との交わり ( $k$  次元) に垂直な  $\mathbb{R}^{k+1}$  において、もとの  $k+1$  次元図形を切断して考える。 $x=t$  で切断してできる  $k$  次元図形の体積を  $v(t)$  とおくと、 $u_{k+1}$  は次のように表現できる。

$$u_{k+1} = \int_a^b v(t) dt \quad \cdots (\text{ア})$$

仮定より、

$$\begin{aligned} u_{k+1}^\downarrow &= \int_a^b v(t) \cos \theta dt \\ &= \cos \theta \int_a^b v(t) dt \quad \cdots (\text{イ}) \end{aligned}$$

(ア), (イ) より、 $u_{k+1}^\downarrow = u_{k+1} \cos \theta$  .

ゆえに、[ i ], [ ii ] より、数学的帰納法から、題意が示された。 (証明終)

② 3-4-2 節の(2)と同様に考える。

単位  $n$  次元格子空間の法線ベクトルを  $\vec{p}(0, 0, \dots, 1)$ , 発生させる図形の法線ベクトルを  $\vec{q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  とおく。このとき、 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ , つまり  $\vec{q}$  は単位ベクトルであるとし、対称性により、 $x_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) で考える。ここで 3-5-2 節の(2)①とベクトルの内積を合わせて考えると、

$$p(n, n+1, n) = \frac{V^{(n)}}{d^{(n)}} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \frac{V^{(n)} \cdot E[x_n]}{d^{(n)}}$$

となる。また、 $p(n, n+1, n) = \frac{k_n V^{(n)}}{d^{(n)}}$  とおくことができる ( $k_n$  は  $n$  によって決まる定数である)。

(3)  $p(n, n+1, n+1)$  を立式する。

3-4-2 節の(3)と同様に考える。発生させる  $n+1$  次元凸  $m$  多面体のそれぞれの体積を  $u_1^{(n+1)}, u_2^{(n+1)}, \dots, u_m^{(n+1)}$  とおく

と、 $S^{(n)} = \sum_{k=1}^m u_k^{(n+1)}$  が成り立つので、

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^m p_k \times \frac{{}_n C_2}{{}_n P_2} = \frac{k_n}{d^{(n)}} \sum_{k=1}^m u_k^{(n+1)} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{k_n S^{(n)}}{2d^{(n)}}. \end{aligned}$$

また、3-5-2 節の(2)①より、三角不等式の  $n$  次元化 ( $s_{n+1} < s_1 + s_2 + \dots + s_n$ ) が得られるので、同様に上下から評価することができ、 $n+1$  次元図形でも同じ結果が得られる。ゆえに、

$$p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S^{(n)}}{2d^{(n)}}.$$

(4) 定数の決定

3-5-2 節の(1)~(3)の研究をまとめると、結局  $p(n, n+1, n+1)$  は  $S^{(n)}$  に比例するというを示していることになる。よって、その比例定数を決定するには最低限ひとつの図形を当てはめる必要がある。そこで、 $n$  次元球を代入すると、

$$p(n, n+1, n+1) = \frac{k_n S_n}{2d^{(n)}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$p(n, n, n) = \frac{V_n}{d^{(n)}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。このままでは定数を決定することではできないが、 $n$  次元球の正射影は方向によらず一定で、 $n-1$  次元球である性質を利用できる。ゆえに

$$p(n, n+1, n+1) = p(n, n, n) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ を解くと、} \frac{k_n}{2} = \frac{V_n}{S_n} \text{ となる。}$$

(5) 公式の利用

上述の漸化式を解く上で、1つの等式を発見したので紹介する。

定理 4

$$\text{等式 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{V_n}{S_n} \pi \text{ が成り立つ。}$$

定理 4 を証明するために、以下の事実を紹介しておく。

$$\bullet V_{2n+2} = \frac{2\pi}{2n+2} V_{2n}, \quad V_1 = 2, V_2 = \pi$$

$$\bullet S_{2n+2} = \frac{2\pi}{2n+1} S_{2n}, \quad S_1 = 2\pi, S_2 = 4\pi$$

(定理4の証明)

[1]  $n$ が偶数のとき

(i)  $n=2$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{V_2}{S_2} \pi = \frac{\pi}{4} \quad \text{より、成立}$$

する。

(ii)  $n=2k$ のとき題意が成り立つと仮定すると、 $n=2(k+1)$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2k+1} x \, dx \\ &= (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx \\ &\quad - (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx \\ = (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx \quad \dots(*) \end{aligned}$$

ここで仮定より、

$$\begin{aligned} (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx &= (2k+1) \frac{V_{2k}}{S_{2k}} \pi \\ &= (2k+1) \frac{\frac{2k+2}{2\pi} V_{2k+2}}{\frac{2k+1}{2\pi} S_{2k+2}} \pi \\ &= (2k+2) \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}} \pi \end{aligned}$$

より、(\*)から、

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = (2k+2) \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}} \pi$$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x \, dx = \frac{V_{2k+2}}{S_{2k+2}} \pi.$$

[2]  $n$ が奇数のとき

(i)  $n=1$ のとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1, \quad \frac{V_1}{S_1} \pi = 1 \quad \text{より、成立する。}$$

(ii)  $n=2k+1$ のとき題意が成り立つと仮定すると、 $n=2(k+1)+1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{2k+2} x \, dx \\ &= (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx \\ &\quad - (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} (2k+3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx \\ = (2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx \quad \dots(**) \end{aligned}$$

ここで仮定より、

$$(2k+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \, dx = (2k+2) \frac{V_{2k+1}}{S_{2k+1}} \pi$$

$$= (2k+2) \frac{\frac{2k+3}{2\pi} V_{2k+3}}{\frac{2k+2}{2\pi} S_{2k+3}} \pi$$

$$= (2k+3) \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}} \pi$$

より、(\*\*)から、

$$(2k+3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = (2k+3) \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}} \pi$$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+3} x \, dx = \frac{V_{2k+3}}{S_{2k+3}} \pi.$$

よって、[1], [2]から、数学的帰納法のよりすべての自然数で題意は示された。

(証明終)

そこで、代入して計算してみると、

$$\frac{k_n}{2} = \frac{V_n}{S_n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \cdots(\dagger)$$

いま、 $\frac{V_n}{S_n}$  は、もちろん漸化式として解く

ことが可能であるが、 $(\dagger)$ 式のように変形することによって、 $n=1$  のとき（ビュフォンの針や定理 2）に三角関数を積分した理由を一般的に理解することができる。また右辺の積分漸化式は、**ウォリス積分**と呼ばれており、スターリングの公式と密接に関係していることが知られている。

定理 5（ウォリスの積分公式）

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$  とおくと、

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$$

が成り立つ。また、

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n: \text{even}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

となる。

(証明)

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$  とすると、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x \, dx \\ &= \left[ \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot (-\cos^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx \end{aligned}$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

したがって、 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$  より、

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

後半を示す。

[1]  $n$  が偶数のとき

漸化式を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

[2]  $n$  が奇数のとき

漸化式を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\ &= \cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!}. \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

そこで、 $(\dagger)$ 式とウォリスの積分公式を合わせて考えると、

$$\frac{k_n}{2} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{1}{2} & (n: \text{even}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{1}{\pi} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

となり、これらを 3-5-2 節の(3)に代入すると、

$$p(n, n+1, n+1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^{(n)}} & (n: \text{even}) \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^{(n)}} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

となる。また、超立方体の体積（単位  $n$  次元格子空間の体積）の公式  $d^{(n)} = d^n$  を用いると、次の定理を得る。

定理 6

$$p(n, n+1, n+1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^n} & (n: \text{even}) \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{S^{(n)}}{d^n} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

確認のために、 $n=1, 2$  の場合について、定理 6 を確認する。

・  $n=1$  のとき

$$d_1 = d, S^{(1)} = L \text{ より、}$$

$$p(1, 2, 2) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{0!!}{1!!} \cdot \frac{L}{d} = \frac{L}{\pi d}$$

・  $n=2$  のとき

$$d_2 = s, S^{(2)} = F \text{ より、}$$

$$p(2, 3, 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{F}{s} = \frac{F}{4s}$$

となり、上述の結果と一致する。

このように、 $n$  が奇数のときには係数に  $\pi$  が存在し、 $n$  が偶数のときには係数に  $\pi$  が存在しないことから、なぜ定理 2 の次元が上がると  $\pi$  が消えるのかについて納得することができた。

**3-6 応用例**

これまでの研究を他の定理や研究に応用させることができないか、応用例を考えた。

**3-6-1 バルビエの定理の別証明**

応用例の 1 つとして、「バルビエの定理」が挙げられる。この定理はバルビエにより、1860 年に発見された。微分幾何の知識（曲率）が証明に必要だと考えられている。しかし、定理 2 を利用すると簡単に証明することができる。

ここで、**定幅図形**とは、図 34 のように、図形の角度にかかわらず高さが一定の図形のことを指す。

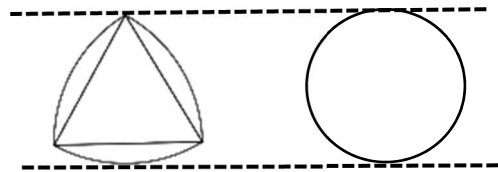


図 34 定幅図形

定理 7 (バルビエの定理)

定幅図形の周長は一定である。

(証明)

幅が  $r$  の定幅図形を間隔  $d$  の平行線が描かれた平面に無作為に投げる。定幅性より、

$$p(1, 2, 2) = p(1, 1, 1) = \frac{r}{d} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、定理 2 より、

$$p(1, 2, 2) = \frac{L}{\pi d} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $L = \pi r$  となり、この定幅図形の周長  $L$  は一定である。（証明終）

**3-6-2 表面積の測定**

定理 3 を利用することにより、以下のように推測している。

(推測)

凸立体図形の表面積はそれを均等にさま

さまざまな角度から見たときの面積（正射影の面積）を4倍すると求められるのではないか。

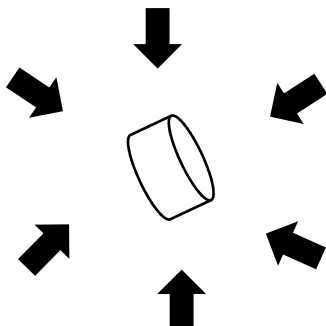


図 35 凸多面体の表面積に関する推測

例えば、半径  $r$  の球の場合その正射影の平均は  $\pi r^2$  となり、それを4倍すると  $4\pi r^2$  であり、球の表面積を測定することができる（定理3で球の表面積の公式を利用しているため証明にはならない）。

正射影の面積の測定は、点の一様分布を利用したモンテカルロ法や  $p(2, 2, 2)$  を利用するのが適切ではないかと考えている。

### 3-6-3 無理数の近似の測定

本研究の背景は、ビュフォンの針で  $\pi$  の近似値を測定できることにあった。そこで、ビュフォンの針を拡張させた理論で他の無理数  $e$  や  $\sqrt{2}$  の近似値を測定できるのではないかと考えた。

#### 例1 ネイピア数 $e$

定理2や  $p(2, 2, 2)$  から周長や面積に  $e$  が関係する図形を考えればよい。身近なものであることを踏まえるとカタナリー曲線を含む凸図形が適するのではないかと考えた。定理2では、確率に結局  $\pi$  が関係しているため、それが関係しない  $p(2, 2, 2)$  を利用の方が無理数による循環論法が生ま

れないので適切である。

#### 例2 2の平方根 $\sqrt{2}$

直角二等辺三角形が適すると考えた。

### 3-6-4 $r \geq d$ の場合

本研究では  $r \ll d$  として研究してきたが、 $r \geq d$  の場合、どうなるのかについて考えた。

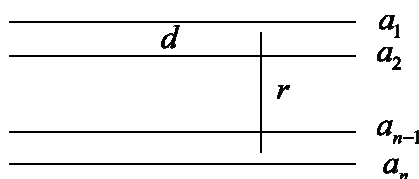


図 36  $r \geq d$  の場合

図36において、長さ  $r$  の針を平行線に対して垂直になるように落としたとき、針と平行線の交差数の期待値を  $E$  とし、 $a_k$  と針が交わる確率を  $p_k$  とおく。周期性より針の上端が  $a_1$  と  $a_2$  の間にあるときを考える。  $E = 1 \times \sum_{k=2}^{n-1} p_k + 1 \times p_n$  となる。

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 1, p_n = \frac{r - d(n-2)}{d}$$

より、

$$E = 1 \times 1 \times (n-2) + 1 \times \frac{r - d(n-2)}{d} = \frac{dn - 2d}{d} + \frac{r - dn + 2d}{d} = \frac{r}{d}$$

このように、 $r \geq d$  を許すとき、 $E = \frac{r}{d}$  となることがわかり、これを定理2へ拡張させると以下の定理が成り立つ。

### 定理 8

間隔  $d$  の無数の平行線が描かれた平面上に周の長さが  $L$  の凸図形を無作為に落としたとき、それらが交わる平行線の本数の期待値を  $E$  とおくと、

$$E = \frac{L}{\pi d}$$

である。

## 4. 今後の課題

### 4-1 応用例の研究

定理 2 および定理 3 の応用理論に関する研究を進めたいと考えている。今回は周長と面積に関係する興味深い不等式を 1 つ紹介する。

### 定理 9 (等周不等式)

平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域  $s$  を考える。  $s$  の面積を  $|s|$ 、周長を  $L$  とおくと不等式

$$4\pi|s| \leq L^2$$

が成り立つ。等号は  $s$  が円のときに成立する。

### 4-2 仮説 1 の研究

4-3-1 節(3)の仮説 1 について平行面と図形の交わる確率に表面積は関係しないという理由からその確率を求めなかったが、実際に確率は何に依存するのかについて考えている。また、その確率は平行面の間隔が 1 次元であることより、  $p(1, 3, 3)$  と表現できる。つまり正射影を 2 回行う必要があり、より複雑になるのではないかと考えている。参考までに、  $d$  を平行面の間隔、  $r$  を針の長

さとして、  $p(1, 3, 1) = \frac{r}{2d}$  である。3-4-2 節(2)の③より空間内での針の座標成分の期待値がわかるので安易に証明できる。

## 5. 参考文献

- [1] 「数学超絶難問」、小野田博一、日本実業出版社
- [2] 「曲線と曲面の微分幾何」、小林昭七、裳華房
- [3] web サイト「高校数学の美しい物語」  
<http://mathtrain.jp>