数学の未解決問題　エルデス・シュトラウスの予想

4年A組　左藤 開己

指導教員　川口 慎二

１．要約

私は数学の未解決問題のひとつであるエルデス・シュトラウスの予想についての研究をしている。今回の研究では予想の解決へのアプローチを目標としている。

予想：2以上のすべての自然数nに対して

$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ を満たす自然数x, y, zが必ず存在する。

２．研究の背景と目的

私は数学の未解決問題に興味をもち、その中でも比較的に研究を進めやすい印象をもったエルデス・シュトラウスの予想をテーマにした。

３．研究内容

３－１　仮説

エルデス・シュトラウスの予想について、$2 \leqq n \leqq 10^6$ に対しては予想が成立することが既に確認されている。10^6を超えて突然に反例が見つかることは起こりにくい考えた。よってこの予想は真であると仮説を立てて、検証することにした。

３－２　代数的アプローチ

すべての自然数において予想が成立することを示す際にいくつかの代数的アプローチが挙げられる。具体的には**数学的帰納法**、**背理法**や**場合分け**などが挙げられる。今回の研究では数学的帰納法や背理法で証明を試みたものの、証明することができなかったため、場合分けにより考察することにした。

３－２－１　計算方法

どのようなパターンに場合分けするかを考えるためにはnにいくつかの値を代入して調べる必要があると考えた。

［計算方法］

①手間を省くためx, y, zの対称性を崩し、$x \leqq y \leqq z$として議論しても一般性を失わない。

②xの範囲を絞って場合分け

③yの範囲を絞って場合分け

<u>例１</u>　　$n=4$のとき

$\frac{4}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{3}{x}$ から$x \leqq 3$

よって、$x=1, 2, 3$.

・$x=3$のとき

$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ から $\frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{2}{y}$

より、$2y \leqq 6,\ y \leqq 3$　ゆえ、$y=1, 2, 3$.

$x \leqq y$　なので、$y=3$.

ゆえに、

$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{z}$ から、$\frac{1}{z}=\frac{1}{3},\ z=3$.

したがって、$(x, y, z)=(3, 3, 3)$.

・$x=2$ のとき

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \text{ から } \frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{2}{y}$$

より、$y\leqq 4$ ゆえ、$y=1, 2, 3, 4$.

$x\leqq y$ なので、$y=3, 4$.

$y=3$ のとき、

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{z} \text{ から、} \frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ z=6.$$

したがって、$(x, y, z)=(2, 3, 6)$.

$y=4$ のとき、

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{z} \text{ から、} \frac{1}{z}=\frac{1}{4},\ z=4.$$

したがって、$(x, y, z)=(2, 4, 4)$.

以上から、$n=4$ のときは、

$(x, y, z)=(3, 3, 3), (2, 3, 6), (2, 4, 4)$.

このように計算することができる。実際はコンピューターによるプログラミングを利用すると効率よく計算できるが、規則性を発見したり、数式の仕組みをより深く理解したりするため、手作業（電卓使用）で計算した。

３－２－２　計算結果・場合分け

まずは n に 2～10 を代入してみた。その計算結果、つまり、方程式 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ を満たす自然数の組 (x, y, z) を表１に示す。

表１

$n=2$ のとき　(1, 2, 2)

$n=3$ のとき

(2, 2, 3), (1, 6, 6), (1, 4, 12)

$n=4$ のとき

(3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)

$n=5$ のとき　(2, 5, 10), (2, 4, 20)

$n=6$ のとき　(4, 4, 6), (3, 6, 6), (3, 4, 12), (2, 12, 12), (2, 10, 15), (2, 9, 18), (2, 8, 24)

$n=7$ のとき　(4, 4, 14), (3, 6, 14), (2, 28, 28), (2, 21, 42), (2, 18, 53), (2, 16, 112), (2, 15, 210)

$n=8$ のとき

(6, 6, 6), (5, 5, 10), (4, 8, 8), (4, 6, 12), (4, 5, 20), (3, 12, 12), (3, 10, 15), (3, 9, 18), (3, 8, 24)

$n=9$ のとき

(6, 6, 9), (4, 9, 12), (4, 6, 36), (3, 18, 18), (3, 12, 36), (3, 10, 90)

$n=10$ のとき　(5, 10, 10), (5, 6, 30), (4, 12, 15), (4, 10, 20), (4, 8, 40), (3, 30, 30), (3, 24, 40), (3, 20, 60), (3, 18, 90), (3, 16, 240)

表１より n, x, y, z の間にいくつかの比の関係があることがわかった。これらの比を、正の整数 k を用いて一般的に表した。

・$n=2k$ のとき

$$\frac{4}{2k}=\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}$$ より、解 $(k, 2k, 2k)$ が存在する。

・$n=3k$ のとき

$$\frac{4}{3k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k}$$ より、解 $(2k, 2k, 3k)$ が存在する。

・$n=5k$ のとき

$$\frac{4}{5k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{5k}+\frac{1}{10k}$$ より、解 $(2k, 5k, 10k)$ が存在する。

・$n=7k$ のとき

$$\frac{4}{7k}=\frac{1}{4k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{14k}$$ より、

解 $(4k,\ 4k,\ 14k)$ が存在する。

これらの式以外でも同様に解の存在を確認できる式が見つかった。例えば、$n=5k$ のとき、上述の解 $(2k,\ 5k,\ 10k)$ 以外に、

$$\frac{4}{5k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{20k}$$ ゆえ、$(2k,\ 4k,\ 20k)$ という解が存在する。

$n=2k,\ 3k,\ 5k,\ 7k$ のときに解の存在を確認でき、これには素数が関係しているのではないかと考えた。

$n=p$（p は素数)のとき、

$$\frac{4}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

の解 $(x,\ y,\ z)$ が存在すれば、

$$\frac{4}{pk}=\frac{4}{p}\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
$$=\frac{1}{kx}+\frac{1}{ky}+\frac{1}{kz}$$

より、$n=pk$ のときも解 $(kx,\ ky,\ kz)$ が存在する。

このように $n=p$（p は素数）のときのみを調べれば、$n=pk$（合成数）のときも確かめたこととなり、結果的にすべての自然数のときを確かめたことになる。

そこで次に、n に 11 以上の素数をいくつか代入してみた。その計算結果、つまり、方程式 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ を表２に示す。

表２

$n=11$ のとき　(6, 6, 33), (4, 9, 396), (4, 12, 33), (4, 11, 44), (3, 66, 66), (3, 44, 132), (3, 42, 154), (3, 36, 396), (3, 34, 1122)

$n=13$ のとき　(5, 10, 130), (4, 26, 52), (4, 20, 130), (4, 18, 468)

$n=17$ のとき　(6, 17, 102), (6, 15, 510), (5, 34, 170), (5, 30, 510)

$n=19$ のとき　(6, 38, 57), (6, 30, 95), (6, 24, 456), (6, 23, 2622), (5, 190, 190), (5, 120, 456), (5, 114, 570), (5, 100, 1900), (5, 96, 9120)

$n=23$ のとき

(12, 12, 138), (10, 15, 138), (9, 18, 138), (9, 16, 3312), (8, 24, 138), (8, 23, 184) (7, 42, 138), (6, 276, 276), (6, 230, 345), (6, 207, 414), (6, 184, 552), (6, 174, 667), (6, 161, 966), (6, 156, 1196), (6, 150, 1725), (6, 147, 2254), (6, 144, 3312), (6, 142, 4899), (6, 141, 6486), (6, 140, 9660), (6, 139, 19182)

表２から、素数は前のように ak という表し方をすることができず、$ak+b$ という形で表すことにした。

今回は $6k+1,\ 6k+5$ で場合分けした。$6k+m$（$m=0, 1, 2, 3, 4, 5$）で場合分けした理由を説明する。

すべての自然数は

$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$

の 6 パターンで場合分けすることができ、その中で、2, 3, 4 は 6 に互いに素でないため、$6k,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4$ は素数ではない。よって、$6k+1,\ 6k+5$ の 2 パターンだ

けを調べればよい。

また、$n=4k+m$ のときも 2 パターンに分けることができるが、$n=6k+m$ のほうがより多くの数を調べることができ効率が良いと考えた。

・$n=6k+5$ のとき

$$\frac{4}{6k+5}=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{6k+5}+\frac{1}{2(k+1)(6k+5)}$$

よって、解

$(2(k+1),\ 6k+5,\ 2(k+1)(6k+5))$

が存在する。

・$n=6k+1$ のときは等式をうまく見つけることができなかった。

そこで、$n=6k+1$ の場合についてさらに調べた。$n=6k+1$ であるとき、k の偶奇により場合分けした。ただし、$k=2m$ のとき、$n=12m+1$ となるが、文字の種類を増やさないため、$n=12k+1$ と表記して考察を進めることとする。

・$n=12k+7$ のとき

$$\frac{4}{12k+7}=\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{2(3k+2)(12k+7)}+\frac{1}{2(3k+2)(12k+7)}$$

よって、解 $((3k+2),\ 2(3k+2)(12k+7),\ 2(3k+2)(12k+7))$ が存在する。

・$n=12k+1$ のときは等式をうまく見つけることができなかった。

同様の作業を行って、

・$n=24k+13$ のとき

$$\frac{4}{24k+13}=\frac{1}{9k+5}+\frac{1}{2(9\mathrm{k}+5)}+\frac{1}{2(9k+5)(24k+13)}$$

よって、解 $((3k+2),\ 2(3k+2)(12k+7),\ 2(3k+2)(12k+7))$ が存在する。

・$n=24k+1$ のときは等式をうまく見つけることができなかった。

その後も上の考え方と同様にして、$n=24k+1$ を $n=48k+1$ と $n=48k+25$ に場合分けしたが両方のパターンで等式を発見することができなかった。

３―２－３　結果

これまでの議論について樹形図を用いて整理すると、図 1 のようになる。

$n=48k+1,\ 48k+25$ の両方の場合においては命題を証明できなかった。したがって、$n=24k+1$ でかつ素数のとき以外について予想は成立している。

３－３　解析的アプローチ

方程式を空間座標や平面座標において図形として捉えて考えた。

n の値を変えて、方程式 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ の表す曲面を xyz 空間内に図示し、$1\leqq x\leqq 10$，$1\leqq y\leqq 10$ の範囲でグラフを作成した。このグラフの**格子点**（x, y, z の各座標がすべて自然数の点）を考える必要があるが、空間座標で考えるとたいへん複雑なので平面座標で考えることにした。

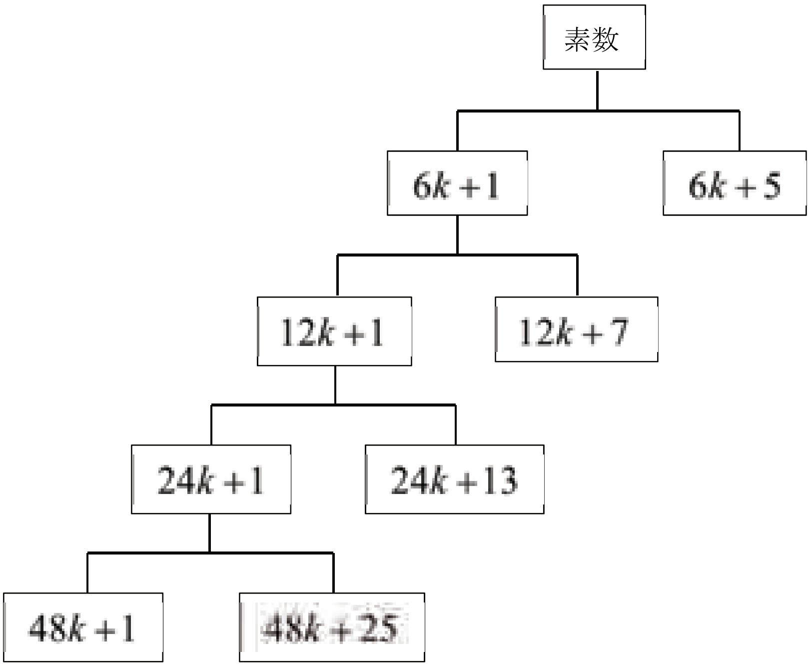

図１

３－３－１　空間座標における解析

・$n=2$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$　が表す曲面のうち、$1\leqq x\leqq 10$，$1\leqq y\leqq 10$ の範囲の整数に対する値の変化を図２に示す。

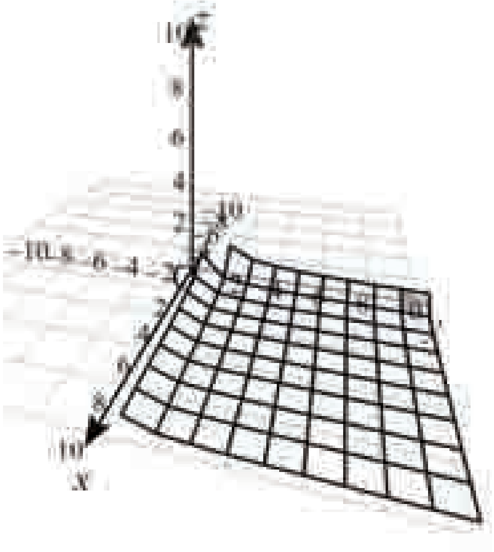

図２

・$n=3$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{3}$　が表す曲面のうち、$1\leqq x\leqq 10$，$1\leqq y\leqq 10$ の範囲の整数に対する値の変化を図３に示す。

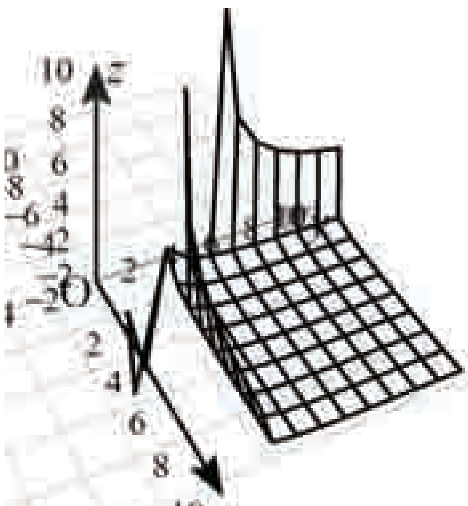

図３

・$n=4$ のとき

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ が表す曲面のうち、$1\leqq x\leqq 10$，$1\leqq y\leqq 10$ の範囲の整数に対する値の変化を図4に示す。

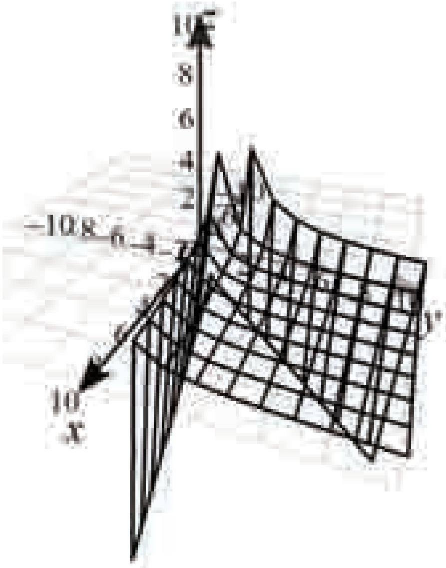

図4

3−3−2　平面座標における解析

ここでは、平面座標において考察するために、$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の場合について解析した。

例として、$n=8$ のときを考える。方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ が表す曲線は図5のようになる。$x\neq 2,\ y\neq 2$ のとき、この曲線は分数関数 $y=\dfrac{2x}{x-2}$ のグラフである。

平面座標の場合、整数（自然数）解の有無を確認するには、格子点について調べる必要がある。しかし、対称性を利用することにより、すべての格子点について考える必要はなく、ある程度範囲を絞ることが可能であると考えた。

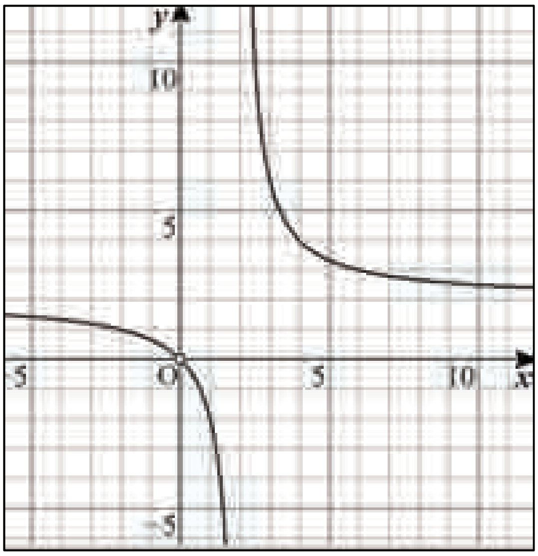

図5

まず、この曲線が直線 $y=x$ に関して対象であるから、$x\geqq y$ とすると図6の斜線部の領域のみを考えればよいことになる。

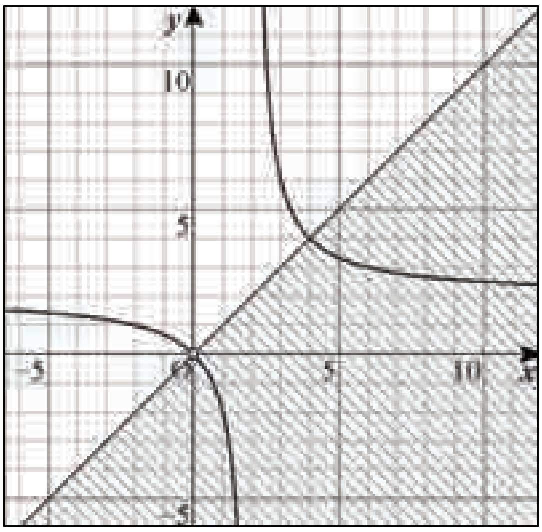

図6

また、分数関数 $y=\dfrac{2x}{x-2}$ の漸近線は、

$$y=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$$

から、2直線 $x=2$ と $y=2$ である。よっ

て、図７の $x \geqq 3,\ y \geqq 3$ の領域のみを調べればよい。

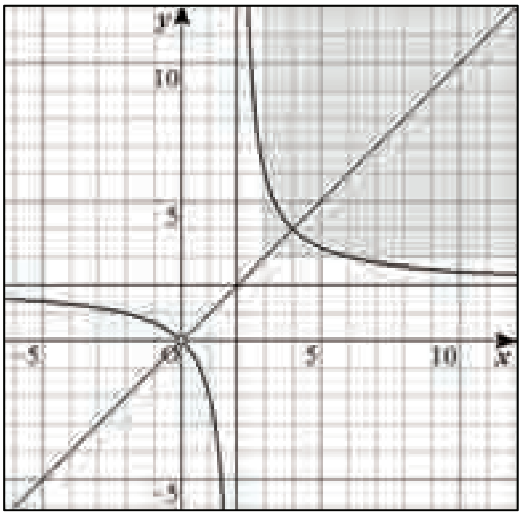

図７

以上を整理すると、図８のように網掛けの部分とグラフが重なる部分だけ調べて格子点を探せば、解 $(x,\ y)=(4,\ 4),\ (6,\ 3)$ を得ることができる。

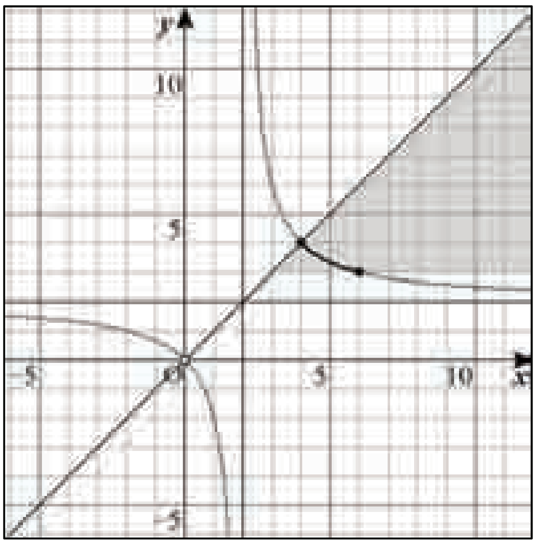

図８

そこで、$n=k$ の場合に一般化して、調べる対象とする領域について考える。

求める領域の左端と下端は、直線 $x=y$ と曲線 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{k}$ の交点なので、$x=\dfrac{k}{2}$ となる。x は自然数であるので、$\lceil a \rceil$ を a 以上の最小な整数として、$\left\lceil \dfrac{k}{2} \right\rceil \leqq x$ と表記できる。

次に、求める領域の右端について考える。曲線 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{k}$ は $x \neq \dfrac{k}{4}$ のとき、式変形をして、$y=\dfrac{kx}{4x-k}$ とできる。このとき、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{kx}{4x-k}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{4-\dfrac{k}{x}}=\frac{k}{4}$$

から、漸近線は $y=\dfrac{k}{4}$ となる。自然数解を考えるので、これより大きく最も近い格子線は、$\lfloor b \rfloor$ を b 以下の最大な整数として、

$y=\left\lfloor \dfrac{k}{4}+1 \right\rfloor$ と表わすことができる。

そこで、$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{k}$ と $y=\left\lfloor \dfrac{k}{4}+1 \right\rfloor$ の交点を考えると、

$$x=\frac{\left\lfloor \dfrac{k}{4}+1 \right\rfloor k}{4\left\lfloor \dfrac{k}{4}+1 \right\rfloor - k}$$

となることから、領域の右端は

$$x=\left\lfloor \frac{\left\lfloor \dfrac{k}{4}+1 \right\rfloor k}{4\left\lfloor \dfrac{k}{4}+1 \right\rfloor - k} \right\rfloor$$

となる。

したがって、

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leqq x \leqq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{k}{4}+1 \right\rfloor k}{4\left\lfloor \frac{k}{4}+1 \right\rfloor - k} \right\rfloor$$

の領域に含まれる $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{k}$ 上の格子点を調べればよいことになる。

３－３－３　結果

空間座標では複雑なので、平面座標で考えたところ、不等式

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leqq x \leqq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{4}+1 \right\rfloor n}{4\left\lfloor \frac{n}{4}+1 \right\rfloor - n} \right\rfloor$$

が表す領域に格子点が存在すれば、その格子点が方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{n}$ の自然数解を与えるので、解が存在することがわかった。

しかし、この方法でもすべての自然数 n について等式の自然数解（つまり、領域内の格子点）が存在することを証明することはできなかった。

４．今後の課題

今回は代数的アプローチと解析的アプローチで研究を進めた。代数的アプローチでは $\frac{4}{n}$ ではなく $\frac{5}{n}$ のとき（**シェルピンスキーの予想**）について考えると、$\frac{4}{n}$ の場合のヒントが得られるかもしれないのでその方向でも研究を進めていきたい。解析的アプローチでは**ピックの定理**（格子点の個数から面積を求める公式）などの幾何特有の理論を使って研究を進めていきたい。

５．参考文献

[1]「高校数学の美しい物語」
http://mathtrain.jp

６．謝辞

今回の研究にあたり、ご指導下さいました顧問の川口先生ありがとうございました。