

ビュフォンの針の高次元への拡張 II

—図形を用いた確率の計算理論と幾何への応用—

6年D組 左藤 開己

指導教員 川口 慎二

1. 要約

私はビュフォンの針に関する研究を行ってきた。今回は昨年度の研究[1]に引き続き、ビュフォンの針の理論を拡張させた無理数の近似的な測定方法や高次元化に関する研究を幾何学的な視点から行った。

キーワード 確率、ビュフォンの針、 n 次元球

2. 研究の背景と目的

今回の研究では、ビュフォンの針に関する性質やその幾何学的な応用に焦点をあてて研究を行った。また実際にビュフォンの針の証明やその実演に関する研究は数多く行われているが、その応用理論はよく知られておらず、独自の証明とそれによる公式の発見を目標としている。

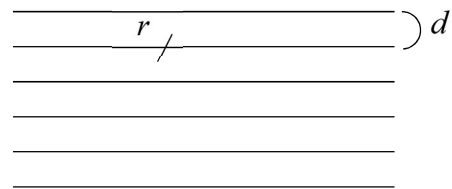


図1 ビュフォンの針

3. 研究内容

本稿では、昨年度の論文[1]と同じ定義を用いている。

3-1 ビュフォンの針

ビュフォンの針の問題とは「間隔 d で描かれた無数の平行線が広がる平面上に長さ r の針を無作為に投げたときにそれが平行線と交わる確率を求める」という問題である (図1 参照)。

ここで、「針を無作為に投げる」とはその座標と方向を一様乱数で発生させるということである。

実際に、 $r < d$ のときに交わる確率は

$$p = \frac{2r}{\pi d}$$

なっていることから大量の針を投げて、その交差数と試行回数から p を求め、 d, r を代入することで円周率 π の近似値を求めることが可能である (モンテカルロ法)。

3-2 主な結果

定理1

間隔 d の無数の平行線が描かれた平面上に、一辺の長さが r ($r \leq d$) である正 n 角形を無作為に落としたとき、それらが交わる確

率を p_n とすると、 $p_n = \frac{nr}{\pi d}$ が成り立つ。

定理 2

間隔 d の無数の平行線が描かれた平面上に、周の長さが L である凸図形を無作為に落としたとき、それらが交わる確率を p とすると、 $p = \frac{L}{\pi d}$ が成り立つ。

定理 3

[1]における定義に基づいて単位正方形の面積を s 、 A の表面積を F とすると、

$$p(2,3,3) = \frac{F}{4s}$$

が成立する。

定理 4

[1]における定義に基づいて、等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{V_n}{S_n} \pi$$

が成り立つ。

定理 5

[1]における定義に基づいて、

$$p(n, n, n+1) = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{V^{(n)}}{d^n} & (n: \text{even}) \\ \frac{2}{\pi} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{V^{(n)}}{d^n} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

が成り立つ。

定理 6

[1]における定義に基づいて、

$$p(n, n+1, n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{S^{(n)}}{d^n} & (n: \text{even}) \\ \frac{1}{\pi} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{S^{(n)}}{d^n} & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

が成り立つ。

定理 7 (バルビエの定理)

定幅図形の周長は一定である。

どこから見ても面積が一定に見える立体図形を定積図形と呼ぶことにする。

定理 8

定積図形を平面に正射影させたときにできる影の面積を c 、定積図形の表面積を F とおくと、 $F = 4c$ が成り立ち、定積図形の表面積は一定である。

3-3 期待値の利用 (非凸図形の場合の考え方)

確率を用いて、 $r \geq d$ の場合や非凸図形の場合を考えることは難しい。しかし期待値の加法性を利用すれば考えることができた。その結果、次の定理を得た。

定理 9

間隔 d で描かれた無数の平行線が広がる平面上に周長 L の多角形を無作為に投げたときに生じる平行線との交点の個数の期待値を E とすると、 $E = \frac{2L}{\pi d}$ が成立する。

(証明)

多角形の一辺の長さ r_k ($1 \leq k \leq n$) に対して平行線と交わる点の個数の期待値を E_k とする

と $E_k = \frac{2r_k}{\pi d}$ が成り立つので、期待値の加法

$$\text{性より、} E \left[\sum_{k=1}^n k \right] = \sum_{k=1}^n E[k] = \sum_{k=1}^n \frac{2r_k}{\pi d} = \frac{2L}{\pi d}$$

が成り立つ。

同様に、3次元においても定理9と同様の証明を行うと以下の定理10を得た。

定理10

[1]の3-4-1節⑥における図のモデルにおいて多面体の表面積を F ，単位正方形の面積を s ，格子との共有点の個数の期待値を E とおくと、

$$E = \frac{F}{2s} \text{ が成立する。}$$

3-4 周長および表面積の測定

定義

周長 L の凸平面図形をある直線に正射影させたときにできる影の平均の長さを $\bar{r}(L)$ とし、表面積 F の凸立体図形をある平面に正射影させたときにできる影の平均の面積を $\bar{c}(F)$ とする。

$p(1,2,2)$ を定理2を用いて2通りの表記で表し、バルビエの定理の別証明と同様にそれらの確率を消去することにより、次の定理を得た。

定理11

$$L = \pi \bar{r}(L) \text{ が成立する。}$$

定理12

$$F = 4\bar{c}(L) \text{ が成立する。}$$

4. 考察

今後の現実の社会への応用、学問への貢献が最も期待できる定理12の展望について紹介する。

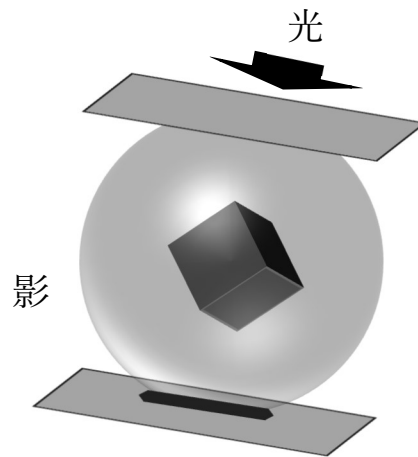


図2 定理12のモデル

図2のように表面積の測定の対象とする図形に対して球面上の一様な方向から接平面に対して、正射影させる。このときに生じる影の面積を測定し、平均値を求めて4倍することにより表面積を算出することができると考えている。

【例1】 立方体

一辺が1の立方体において、それぞれの面の法線ベクトルを $(0,0,\pm 1)$ ， $(0,\pm 1,0)$ ， $(\pm 1,0,0)$ として、接平面の法線ベクトル（単位ベクトル）を (x,y,z) とする。

このとき、それぞれの面の影の面積は $|z|$ ，

$|z|, |y|, |y|, |x|, |x|$ となり、図形全体の影の

面積はこれらの和の半分である $|x|+|y|+|z|$ と

なる。

(1) シミュレーションによる実験

実際に定理12の実用が可能であるかを確かめる検証実験を、立方体によるシミュレーションを用いて行った。

【検証方法】	x 成分	y 成分	z 成分	影の面積
①正射影させる平面の法線ベクトル \vec{q} (単位ベクトル) 成分を (x, y, z) と定める。 \vec{q} は単位ベクトルなので、 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である。	-0.41082	0.66831	-0.62015	1.699283
②一辺が 1 の立方体を定めて、それぞれの面の法線成分を $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$ とおく。	0.111994	-0.87143	0.477557	1.460984
③ \vec{q} の始点を単位球の中心とし、先端が単位球面上の点としたとき、その点が単位球面上の一様分布になるように (x, y, z) の乱数を生成する。	-0.06423	-0.48496	0.872173	1.421365
④立方体の影の面積を求め、平均をとる。	-0.56561	0.62852	0.533897	1.728029
⑤平均の影の面積を 4 倍して表面積に一致するかを確かめる。	-0.27844	0.842553	-0.46106	1.582052
	-0.99927	-0.03785	0.005403	1.042518
	0.286958	0.286321	-0.91415	1.487431
	0.663861	-0.74151	-0.09724	1.502606
	-0.69239	-0.32381	-0.64479	1.660981
	-0.8643	0.472727	-0.17181	1.508838
	-0.49384	-0.05766	-0.86764	1.419141
	0.286585	-0.90572	-0.31232	1.504623
	0.37293	-0.84978	-0.37254	1.595259
	0.51894	-0.35299	0.778525	1.650452
	0.968288	-0.21515	0.127009	1.310442
	0.945685	0.317549	-0.06959	1.332825
	-0.93453	-0.3482	0.073539	1.356273
	-0.29247	0.917806	-0.2685	1.478779
	-0.98133	-0.18216	0.061676	1.225171
	0.222171	-0.80176	0.554812	1.578746
	-0.08928	0.992421	-0.08444	1.166135
	0.459218	-0.60598	-0.64955	1.714741
	-0.31368	0.891524	-0.32679	1.531991
	0.988953	0.039108	-0.14298	1.171041
	-0.75543	-0.55889	0.341998	1.656321
	-0.35038	-0.7564	-0.55235	1.659133
	-0.48643	-0.72927	-0.4812	1.696898
	0.842881	-0.3343	-0.42166	1.598839
	0.955366	0.294322	-0.02552	1.275208
	-0.16588	-0.34367	-0.92432	1.433874
	0.823961	-0.04674	0.564716	1.435415
	0.428246	0.310276	-0.84873	1.587247
	0.889699	-0.06439	-0.45198	1.406076
	-0.97158	0.038969	0.233479	1.244029
	0.327665	-0.55094	-0.76753	1.646133

【検証結果】

70 回のシミュレーション結果をまとめる。

x 成分	y 成分	z 成分	影の面積
0.629504	-0.63656	-0.44555	1.711616
0.92356	0.263975	0.278126	1.46566
0.200624	0.561016	-0.80313	1.564766
0.838223	-0.36346	0.40654	1.608228
-0.57676	0.755478	0.310809	1.643046
-0.70881	-0.34391	0.615887	1.668605
-0.36555	0.18808	0.911591	1.465222
0.189516	0.656832	-0.72983	1.576181
-0.81635	0.023214	-0.57709	1.416655
0.948572	-0.15696	-0.27491	1.380441
-0.72531	0.37463	0.577565	1.677502
-0.84358	0.438082	0.310563	1.592229
0.4818	-0.13321	-0.8661	1.481107
-0.62665	0.768218	0.130962	1.52583
0.820153	-0.56285	0.102733	1.485732

x 成分	y 成分	z 成分	影の面積
0.623156	0.099661	-0.77572	1.498539
0.774858	0.630801	0.041052	1.446711
-0.09155	0.704645	0.70363	1.499823
0.575792	0.124926	-0.808	1.508714
0.727394	0.036512	-0.68525	1.449154
-0.32694	0.905288	0.27123	1.503455
-0.71864	0.39975	0.568992	1.687385
-0.25908	-0.69423	-0.67151	1.624817
-0.97221	-0.21711	0.087614	1.276934
-0.75948	0.047573	-0.64879	1.455842
0.0923	-0.76572	-0.63652	1.494538
0.666899	0.18197	-0.72259	1.571456
0.945464	0.260869	0.195054	1.401386
-0.21206	0.472953	-0.85519	1.540203
0.369558	0.013387	-0.92911	1.312057
0.761708	0.220317	0.609312	1.591337
0.60039	0.632007	0.489999	1.722396

10 回の平均	1.5500
20 回の平均	1.5151
30 回の平均	1.5085
40 回の平均	1.4876
50 回の平均	1.4885
60 回の平均	1.4900
70 回の平均	1.4913

(小数第 3 位で換算)

【考察】

70 回のシミュレーション結果から平均をとると、影の平均の面積は約 1.4913 であることがわかった。ここで、 $1.4913 \times 4 = 5.9652$ となり、確かに立方体の表面積 6 に近い値になっていることを確認できた。また、立方体の場合について、これらの予想が正しいことを、計算を用いて示すことができた。

【期待値の計算を用いた証明】

影の平均の面積は $E[x] + E[y] + E[z]$ となり、[1]の 3-4-2(2)③の考え方を利用すると、 $E[x] + E[y] + E[z] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ となる。これを 4 倍すると 6 になり、確かに立方体の表面積と一致している。

【例 2】 球

半径 r の球の影の面積はどの方向から見ても πr^2 である。これを 4 倍すると $4\pi r^2$ となるがこれは確かに球の表面積と一致している。

5. 今後の課題

定理 2 および定理 3 の応用理論に関する研究を進めたいと考えている。今回は周長と面積に関する興味深い不等式を 1 つ紹介する。

定理 13 (等周不等式)

平面内の滑らかな曲線で囲まれた領域 s を考える。 s の面積を $|s|$ 、周長を L とおくと不等式 $4\pi|s| \leq L^2$ が成り立つ。

等号は s が円のときに成立する。

この等周不等式と定理 2 や定理 3 との関連性を検討し、空間図形における”等積不等式”のような新しい体積の評価を与えることができないかを検討したい。

また、定理 12 を実用化するための方法についても検討したい。

6. 参考文献

- [1] 左藤開己, 「ビュフォンの針の幾何学的拡張」, 奈良女子大学附属中等教育学校令和元年度サイエンス研究会生徒論文集(2019)
- [2] 小野田博一, 「数学超絶難問」, 日本実業出版社
- [3] 小林昭七, 「曲線と曲面の微分幾何」, 裳華房
- [4] 「高校数学の美しい物語」
<http://mathtrain.jp>